数理解析研究所講究録
第1540巻 2007年 107-110

弱順序極小実閉体上の C^r セル分解

田中広志
700-8530 岡山県岡山市津島中 3-1-1
岡山大学自然科学研究科
htanaka@math.okayama-u.ac.jp

川上 智博
640-8510 和歌山市栄谷 930
和歌山大学教育学部数学教室
kawa@center.wakayama-u.ac.jp

ここでは、$\mathcal{R} = (R, <, \dots)$ を端点をもたない稠密線形順序をもった構造とする。**稠密**とは、任意の $x, y \in R, x < y$ に対して、ある $z \in R$ が存在して $x < z < y$ となることである。**線形順序**とは、任意の $x, y \in R$ に対して、$x = y, x < y, y < x$ のどれかが成り立つことである。**端点をもたない**とは、任意の $x \in R$ に対して、ある $y, z \in R$ が存在して $y < x < z$ となることである。

$A \subset R^n$ がデファイナブルとは、パラメータを含んでもよいとする。$A \subset R^n$ が**デファイナブル**とは、ある論理式 $\phi(x, y)$ とある $b_1, \dots, b_m \in R$ が存在して、$A = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^n | \phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ が $\mathcal{R}$ で正しい $\}$ となることである。

$A \subset R$ が**凸**とは、任意の $a, b \in A$ に対して、$(a, b) := \{x \in R | a < x < b\} \subset A$ となることである。$\sup A, \inf A \in R \cup \{\pm\infty\}$ のとき、A を**区間**という。

$\mathcal{R}$ が**順序極小**（**弱順序極小**）とは、R の任意のデファイナブル部分集合 A が区間の有限和（凸集合の有限和）となることである。ただし、$a \in R$ に対して、一点集合 $\{a\}$ を $[a, a]$ とみる。順序極小構造については [1], [2], 弱順序極小構造については [7], [9], [10] に

2000 *Mathematics Subject Classification*. 14P10, 14P20, 03C64.
Keywords and Phrases. o-minimal, weakly o-minimal, cell decompositions, C^r cell decompositions.

解説がある。順序極小構造の応用例は、[3], [4], [5], [6] などがある。ここでは、[8] で研究されている弱順序極小実閉体上の C^r セル分解について解説する。

$C, D \subset R$ とする。$C < D$ とは、任意の $c \in C$ と任意の $d \in D$ に対して、$c < d$ となることである。$< C, D >$ が**切断**とは、$C < D, R = C \cup D$ かつ D が最小元をもたないことである。

$\overline{R} := \{< C, D > \mid < C, D >$ はデファイナブル切断 $\}$ とする。任意の $a \in R$ に対して、$< (-\infty, a], (a, \infty) >$ として、$R \subset \overline{R}$ とみる。$< C_1, D_1 > << C_2, D_2 >$ を $C_1 \subsetneq C_2$ と定義し、$(R, <)$ を $(\overline{R}, <)$ の部分構造とみなす。

命題 1. $\mathcal{R} = (R, <, \dots)$ が順序極小構造ならば、$\overline{R} = R$。

例 2. $\mathbb{Q}_1 := (\mathbb{Q}, <, P), P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ とする。これは、弱順序極小構造であり、$\overline{\mathbb{Q}_1} = \mathbb{Q} \cup \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ となっている。ただし、$\sqrt{2} =< (-\infty, \sqrt{2}], (\sqrt{2}, \infty) >$ である。

定義 3. $A \subset R^n$ をデファイナブル集合とする。$f : A \to \overline{R}$ が**デファイナブル**とは、$\Gamma_<(f) := \{(x, y) \in A \times R | y < f(x)\}$ がデファイナブルであることである。

$f : A \to R$ のとき、f がデファイナブルとなる必要十分条件は、f のグラフ $\Gamma(f) := \{(x, y) \in A \times R | y = f(x)\}$ がデファイナブルとなることである。

例 4. $\mathbb{Q}_2 := (\mathbb{Q}, <, +, P), P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ とする。これは、弱順序極小構造である。$f : \mathbb{Q} \to \overline{\mathbb{Q}}, f(x) = x + \sqrt{2}$ はデファイナブルである。なぜならば、$\Gamma_<(f) = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} | \exists z \in P \ y < x + z\}$ となるからである。

$\mathcal{R} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ を順序体の弱順序極小拡張とする。このとき、$\mathcal{R}$ は実閉体となることが知られている ([7])。切断 $< C, D >$ が**非付値的**とは、$\inf\{y - x | x \in C, y \in D\} = 0$ となることである。$\mathcal{R}$ が**非付値的**とは、任意のデファイナブル切断が非付値的となることである。$\mathcal{R}$ が非付値的のとき、$\overline{R}$ 上に和と積が定義できて、$(R, +, \cdot, <)$ を $(\overline{R}, +, \cdot, <)$ の部分順序体と考えることができる。

例 5. $\mathbb{R}_{alg} := \{x \in \mathbb{R} | x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的 $\}$ とし、$\mathcal{R}_1 := (\mathbb{R}_{alg}, +, \cdot, <, P), P = (-\pi, \pi) \cap \mathbb{R}_{alg}$ は非付値的弱順序極小実閉体である。

非付値的とならないものは、実閉付値体の弱順序極小拡張である。

R と $\overline{R}$ に開区間を基とする位相を入れる。$R \neq \mathbb{R}$ のとき、この位相は、局所コンパクトとも局所連結とも限らない。

これ以降は、$\mathcal{R} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ を順序体の非付値的弱順序拡張とする。

$U \subset R^n$ をデファイナブル開集合とする。$f: U \to \overline{R}$ が C^1 **写像**とは、f が連続であって、各 i に対して、$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \overline{R}$ が存在して連続であることである。$r \in \mathbb{N}$ とするとき、$f: U \to \overline{R}$ が C^r **写像**とは、f が連続であって、各 i に対して、$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \overline{R}$ が C^{r-1} 写像であることである。

$A \subset R^n$ をデファイナブル集合とする。$f: A \to \overline{R}$ が C^r **写像**とは、あるデファイナブル開集合 U とある C^r 写像 $F: U \to \overline{R}$ が存在して、$A \subset U, f = F|A$ となることである。

次に強セルとその完備化を定義する。

任意の $a \in R$ に対して、$\{a\}$ は強 $< 0 >$ セルで、$\overline{C} := \{a\}$。R の空でないデファイナブル凸開集合 C に対して、C は強 $< 1 >$ セルで、$\overline{C} := \{x \in \overline{R} | \exists a, b \in C \ a < x < b\}$。

$C \subset R^n$ が強 $< i_1, \dots, i_n >$ セルとする。$f: C \to R$ がデファイナブルで、$\overline{f}: \overline{C} \to \overline{R}$ に連続拡張をもつとき、$\Gamma(f)$ は強 $< i_1, \dots, i_n, 0 >$ セルで、$\overline{\Gamma(f)} = \Gamma(\overline{f})$。

$g, h: C \to \overline{R} \cup \{\pm\infty\}$ がデファイナブルで、連続拡張 $\overline{g}, \overline{h}: \overline{C} \to \overline{R} \cup \{\pm\infty\}$ をもち、$\forall x \in \overline{C}$ に対して、$\overline{g}(x) < \overline{h}(x)$ のとき、$(g, h)_C := \{(a, b) \in C \times R | g(a) < b < h(a)\}$ は強 $< i_1, \dots, i_n, 1 >$ セルで、$\overline{(g, h)_C} := \{(a, b) \in \overline{C} \times \overline{R} | \overline{g}(a) < b < \overline{h}(a)\}$。

f, g, h が C^r 関数のとき、C^r **強セル**という。

C を強セル、$f: C \to \overline{R}$ をデファイナブルとするとき、f が**強連続**とは、連続拡張 $\overline{f}: \overline{C} \to \overline{R}$ をもつことである。強連続ではない単なる連続は望ましい性質をもたない。

例 6. $\mathcal{R}_1 = (\mathbb{R}_{alg}, +, \cdot, <, P), P = (-\pi, \pi) \cap \mathbb{R}_{alg}$ とし、
$f: (0, 5) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi) \cap \mathbb{R}_{alg} \\ x - 1, & x \in (\pi, 5) \cap \mathbb{R}_{alg} \end{cases}$ は連続だが強連続でない。

定義 7. *(1)* R の空でないデファイナブル部分集合 A に対して、R の強セルの集まり $\mathcal{D} = \{C_1, \dots, C_k\}$ が A の分解となっているとき、$\mathcal{D}$ を**強セルへの A の分解**という。

(2) R^{n+1} の空でないデファイナブル部分集合 A に対して、R^{n+1} の強セルの集まり $\mathcal{D} = \{C_1, \dots, C_k\}$ が、異なるものは交わらず、$A = \cup_{i=1}^k C_i$ となっているとき、$\mathcal{D}$ が A の**強セルへの A の分解**とは、$\{\pi(C_1), \dots, \pi(C_k)\}$ が $\pi(A)$ の強セルへの分解となっていることである。ただし、$\pi: R^{n+1} \to R^n, \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ とする。

定理 8 ([9]). $\mathcal{R} = (R, +, <, \dots)$ を順序群の非付値的弱順序極小拡張とし、$A \subset R^n$ をデファイナブルとする。

(1) A は強セルへの分解をもつ。

(2) $f: A \to \overline{R}$ をデファイナブルとするとき、A の強セルへの分解 $\mathcal{D}$ が存在して、任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して、$f|C: C \to \overline{R}$ は強連続となる。

次の定理が本稿の主要定理である。

定理 9 ([8]). $n, r \in \mathbb{N}$、$\mathcal{R} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ を順序体の非付値的弱順序極小構造、$A \subset R^n$ をデファイナブルとする。

(1) A は C^r 強セル分解をもつ。

(2) $f : A \to \overline{R}$ をデファイナブルとするとき、A の C^r 強セル分解 $\mathcal{D}$ が存在して、任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して、$F|C : C \to \overline{R}$ は C^r かつ強連続となる。

順序極小構造における四大定理とその弱順序極小構造での成立状況を以下の表にまとめておく。

	単調性定理	セル分解定理 C^r セル分解定理	三角形分割定理	部分的自明性定理 C^r 部分的自明性定理	応用例
順序極小構造	○	○ ○	○	○ ○	○
弱順序極小構造	○	○ ○（主要定理）	これから	これから	これから

References

[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996). 497-540.

[3] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci., **54**, (2004), 1-15.

[4] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123**, (2002), 323-349.

[5] T. Kawakami, *Homotopy property of definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53**, (2003), 1-6.

[6] T. Kawakami, *Proper definable actions*, preprint.

[7] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 5435–5483.

[8] H. Tanaka and T. Kawakami, C^r strong cell decompositions in non-valuational weakly o-minimal real closed fields, preprint.

[9] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, RAAG preprint n. 182 (http://ihp-raag.org/).

[10] R. Wencel, Topological properties of sets definable in weakly o-minimal structures, RAAG preprint n. 181 (http://ihp-raag.org/).